

13. A Venn-Euler diagram és a logikai szita

Az ábráknak nemcsak a geometriában van fontos szerepük, hanem a legkülönbözőbb feladatok megoldásában is segíthetik a kiindulási adatok elrendezését, összefüggések felismerését, megkönnyíthetik a feltárt összefüggések későbbi felidézését és ellenőrzését.

A matematika különböző területein már régóta használatosak az úgynevezett *Venn-* és *Venn-Euler-diagramok*, a halmazok közötti kapcsolatok, viszonyok tükrözésére, adott tulajdonsággal rendelkező halmazok és azok számosságának (elemei számának) meghatározására, valamint egyes állítások logikai értékének megállapítására, logikai következtetések vizsgálatára (ezért is nevezik ezeket még halmazábráknak is).

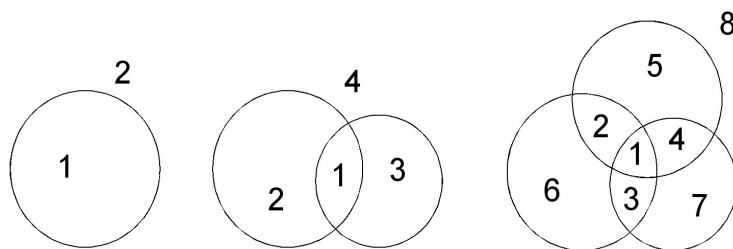
Egy *Venn-diagramot* körökkel, vagy más zárt görbékkel, vagy ennél általánosabb alakzatokkal, például n egyszerű zárt görbével adunk meg a síkon. Minden görbe belseje valamilyen halmazt ábrázol, a zárt görbén kívül eső rész pedig annak komplementerét.

Az $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ görbecsaládot *Venn-diagramnak* nevezzük, ha a görbék a síkot pontosan 2^n diszjunkt tartományra bontják, és a tartományok megegyeznek az összes lehetséges $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k$ alakú halmazzal, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ahol minden X_i helyére az A_i egyszerű, zárt görbe belsejét vagy külsejét írhatjuk, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

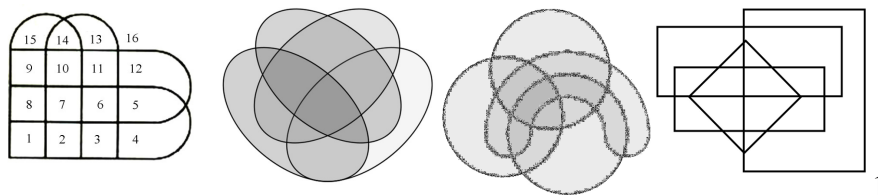
A körvonalakról az egyszerű zárt görbékre történő általánosítás okára nyomban rávilágít az alábbi észrevétel, mely már Venn 1880-as dolgozatában megtalálható:

„Bármely diagramban legfeljebb három körvonal fordulhat elő.”

A bizonyítás lényege: n darab körvonal a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja (v.ö.[1]). Ezért a Venn-diagram értelmezése alapján következik: $n \leq 3$. Az $n = 1$, $n = 2$ és $n = 3$ eseteknek megfelelő diagramok a síkot rendre 2^1 , 2^2 , 2^3 részre osztják, lásd a következő ábrákat:



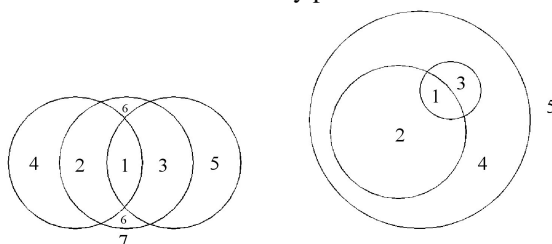
Másfajta görbékkel bármely n értékre lehet n görbét tartalmazó *Venn-diagramot* készíteni. A probléma ellenben ott van, hogy az $n > 3$ szám növekedésével az ábrák egyre bonyolultabbak, nehezen használhatók feladatok megoldására. Nézzünk néhányat $n = 4$ esetén:



Mind a négy ábra a síkot 16 diszjunkt tartományra osztja. Hasonló ábrák szerkeszthetők $n > 4$ esetén is, de ezek gyakorlati szempontból nem használhatók, ugyanis kevésbé áttekinthetők.

Könnyen belátható, hogy $n > 3$ esetén az egyes tartományok azonosítása már körülményes.

Térjünk vissza a Venn-diagramok beindított tanulmányozásához. Az $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k$ alakú halmazokat atomoknak nevezzük. Ha a síkot n görbe p síkdarabra vágja és a létrejövő atomok száma a , akkor nyilvánvalóan $a \leq p$. A Venn-diagramokra teljesül: $a = p = 2^n$. Ezenkívül az $a \leq p \neq 2^n$ esetekben is használt diagramokkal is gyakran találkozhatunk. Íme néhány példa:



Az első esetben $a \leq p \neq 2^n$ ($a = 7$, hiszen a 6-os számmal jelölt síkdarabok ugyanahhoz az atomhoz tartoznak), a második esetben $5 = a = p \neq 2^n$. Az ilyen típusú diagramot általában *Venn–Euler-diagramnak* nevezik. Ez a megnevezés inkább hazánkban honosodott meg, más országokban inkább tágabb értelemben vett, ugyancsak Venn-diagramoknak nevezik.

Érdemes megjegyezni, hogy az értelmezés szerinti Venn-diagram n görbéje által határolt síkbeli részek között minden lehetséges atom létezik. Más szóval a Venn-diagram esetén mindegyik $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_k$ alakú halmaz létezik, míg a Venn–Euler-diagram esetén ez nem föltétlenül igaz. Tehát a Venn-diagramok az úgynevezett Venn–Euler-diagramok részhalmazát képezik. Az elkövetkezőkben bemutatjuk e diagramok néhány alkalmazási lehetőségét.

Egyik azonnali alkalmazását az úgynevezett logikai szita-formulák képezik.

A továbbiakban jelöljük $|X|$ vagy $\text{card}(X)$ az X halmaz elemeinek a számát (számosságát). A kétkörös Venn–Euler diagramról leolvasható, hogy két halmaz esetén igaz, hogy $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (1). Továbbá, ha

$X \subset S$, akkor nyilvánvaló, hogy $|S - X| = |S| - |X|$, és most az $X = A \cup B$ választással, az $A, B \subset S$ feltételekkel, az (1) alapján kapjuk, hogy

$$|S - (A \cup B)| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| \quad (1').$$

Az (1) és (1') összefüggéseket másodrendű szita-formulának, vagy egyszerűen logikai szitának hívjuk (a logikai szitára még használatos a bennfoglalás-kizárás formula elnevezés is).

Hasonló összefüggést állapíthatunk meg három halmaz esetén is, ha a három körös Ven-diagramot követjük. Ez alapján felírható, hogy

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \quad (2).$$

Az előbbiek mintájára, az $A, B, C \subset S$ feltételek mellett levezethető a következő összefüggés is:

$$|S - (A \cup B \cup C)| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - |A \cap B \cap C| \quad (2').$$

A (2) és a (2') képezik a harmadrendű szita-formulákat. Természetesen a szita-formula érvényes marad háromnál több tag esetén is. Ennek az általános alakja:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |A_j \cap A_k| + \sum_{1 \leq j < k < l \leq n} |A_j \cap A_k \cap A_l| - \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

(3) és továbbá

$$\left| S - \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \right| = |S| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq j < k \leq n} |A_j \cap A_k| - \sum_{1 \leq j < k < l \leq n} |A_j \cap A_k \cap A_l| + \dots + (-1)^{n+2} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

(3').

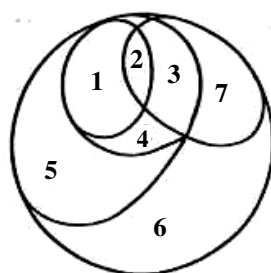
A (3) és a (3') n-ed rendű szita-formulákat a matematikai indukcióval is bizonyíthatjuk.

A továbbiakban olyan alkalmazásokat mutatunk be, amelyeknek a megoldása Ven-Euler diagrammal és a szita-formulával egyaránt elvégezhető, de mutatunk be olyan feladatokat is, amelyeknél az egyik vagy a másik módszer előnyösebb.

1. feladat

Venn–Euler-diagram segítségével szemléltessük a négyszögek, trapézok, paralelogrammák, téglalapok, négyzetek és rombuszok halmaza közötti összefüggéseket!

Megoldás: A viszonyokat a mellékelt diagram fejezi ki. Ez a diagram nagymértékben megkönnyíti a négyszög, trapéz, paralelogramma, négyzet és rombusz fogalmak értelmezését, rögzítését és közös tulajdonságaik megállapítását. A diagram lehetőséget nyújt egy adott négyszögtípus többféle értelmezésére is.



- 1: a téglalapok halmaza
- 2: a négyzetek halmaza
- 3: a rombuszok halmaza
- 4: a paralelogrammák halmaza
- 5: a trapézok halmaza
- 6: a négyszögek halmaza
- 7: a deltoidok halmaza

2. feladat

Hat barátról a következőket tudjuk: Attila magas, barna, szemüveges; Bori magas, szőke, szemüveges; Cili magas, barna, nem szemüveges; Elek alacsony, barna és nem szemüveges; Fruzsina közepes magasságú, barna és nem szemüveges; Dani magas, fekete, nem szemüveges.

a) Milyen tulajdonságok alapján csoportosítottuk a hat barátot az ábrán?

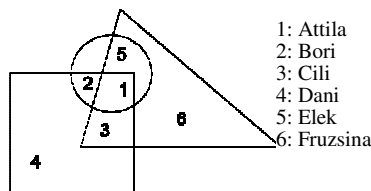
b) A hat barátról a következőket hallottam:

1. A szemüvegesek mind barnák vagy magasak.

2. A magas barna gyerekek mind szemüvegesek.

Melyik állítás igaz, melyik állítás hamis? (v.ö. [5].)

Megoldás



Mivel Attila, Cili, Elek, Fruzsina a háromszögbe kerültek, ezért van egy közös tulajdonságuk: mind barnák. Tehát a háromszög a barnák halmazát jelöli. A körbe Attila, Bori, Elek került, így a kör a szemüvegesek halmaza. Belátható, hogy a négyzet a magas tanulók halmazát szemlélteti.

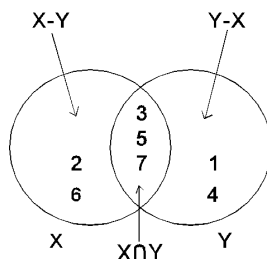
Az 1. állítás igaz, mivel a körben lévő személyek ugyanakkor vagy a háromszögben vagy a négyzetben (vagy mindkettőben) vannak. A 2. állítás nem igaz, mert a négyzet és a háromszög közös részében lévő személyek közül nem mindegyik van a körön belül (például Cili).

3. feladat

Határozzuk meg azokat az X , Y halmazokat, amelyekre egy időben teljesülnek az alábbi feltételek:

a) $X \cap Y = \{3, 5, 7\}$; b) $X - Y = \{2, 6\}$; c) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Megoldás



Szemléltessük a két halmazt a látható módon. Az ábráról az $X \cap Y$, $X - Y$, $X \cup Y$ halmazok jelentése leolvasható. Leghamarabb a 3, 5, 7 elemeket írjuk be az $X \cap Y$ -t jelző tartományba, utána az $X - Y$ tartományba a b) pontban szereplő 2, 6 elemeket írjuk be.

Az 1 és a 4 elem sem az $X \cap Y$, sem az $X - Y$ tartományba nem írhatók, hiszen akkor jelen lennének az a) vagy b) feltételekben. Tehát $1 \in Y - X$ és $4 \in Y - X$, ezért $X = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ és $Y = \{1, 3, 4, 5, 7\}$.

4. feladat

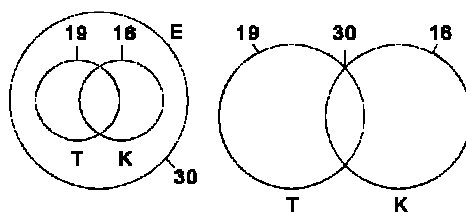
Egy osztály 30 tanulója közül 19 teniszeznek, 16 pedig kézilabdáznak.

a) Legalább hányan teniszeznek is és kézilabdáznak is?

b) Ha minden tanuló vagy teniszeznek vagy kézilabdáznak, hányan gyakorolják egy időben mindkét sportágat?

(S.M.P. Book. T. p. 27/1969, v.ö. [2])

Megoldás. Jelölje E az osztály tanulóinak halmazát, valamint T a teniszezők és K a kézilabdázók halmazát. Az a) pontot az első ábra, a b) pontot a második ábra alapján oldjuk meg.



a) Nyilván van olyan tanuló, aki sem nem teniszeznek, sem nem kézilabdáznak, ezért $|T \cup K| \leq 30$. Ha $|T| = 19$ és $|K| = 16$, akkor az (1) alapján $|T \cap K| = |T| + |K| -$

$|T \cup K|$. A fentiek értelmében $|T \cap K| \geq 19 + 16 - 30 = 5$.

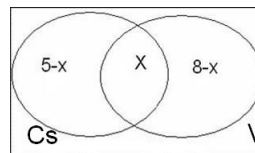
Tehát legalább 5 tanuló teniszeznek is és kézilabdáznak is.

b) Jelen esetben $|T \cup K| = 30$, és az előbbieket alapján $|T \cap K| = 5$.

Megjegyzés. Feltétlenül ki kell hangsúlyozni, hogy a Venn–Euler-diagram esetén egy nagyobb zárt görbe vonal nem okvetlenül nagyobb számosságú halmazt ábrázol, mint egy kisebb zárt görbe vonal. Ilyen értelemben semmilyen utalást nem végzünk.

5. feladat: Egy fagyisnál kétféle fagyiból lehet választani: csoki és vanília. 11-en állnak sorban a fagyisnál 5-en kértek csokis fagyit. Vaníliát 3-mal többen kértek mint csak csokist. Hányan kértek csokis és vaníliás fagyit is?

Megoldás: Jelölje Cs illetve V azok halmazát akik csokis illetve vaníliás fagyit vásároltak.



$$|Cs \cap V| = x$$

Készítsük el a mellékelt ábrán látható Ven-Euler diagramot. Jelölje

akkor $|Cs - V| = 5 - x$ és $|V - Cs| = 8 - x$, ezért az $(5-x)+x+(8-x)=11$ egyenletből $x=2$.

6. feladat: Hány darab olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely osztható 5-tel, vagy 6-tal, esetleg mind a kettővel?

Megoldás: Összesen $99-9=90$ kétjegyű szám van, ebből kiszámoljuk, hogy hány 5-tel és 6-tal osztható kétjegyű szám van. Legyen $A = \{10, 15, \dots, 95\}$ az 5-tel osztható kétjegyű számok halmaza és $B = \{12, 18, 24, \dots, 96\}$ a 6-tal osztható kétjegyű számok halmaza.

Tehát $A \cap B = \{30, 60, 90\}$ a 30-cal osztható kétjegyű számok halmaza.

Ekkor $|A| = \left\lceil \frac{99}{5} \right\rceil - 1 = 19 - 1 = 18$, $|B| = \left\lceil \frac{99}{6} \right\rceil - 1 = 16 - 1 = 15$ (ki kellett

vennünk az 5 és a 6 egyjegyű számokat), továbbá $|A \cap B| = 3$. Az (1)-es szita-

formula alapján felírható, hogy $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 18 + 15 - 3 = 30$

. Tehát 30 kétjegyű szám osztható 5-tel vagy 6-tal.

7. feladat: Hány darab olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 5-tel, sem 6-tal?

Megoldás: Erre a kérdésre úgy is válaszolhatunk, hogy figyelembe vesszük, hogy az előbbi feladat alapján 30 szám osztható 5-tel vagy 6-tal, tehát $90-30=60$ nem osztható egyikkel sem. Ellenben a feladat megoldható a komplementer szita-

formulával: $|S - (A \cup B)| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$, ahol

$|A| = \left\lceil \frac{99}{5} \right\rceil - 1 = 19 - 1 = 18$, $|B| = \left\lceil \frac{99}{6} \right\rceil - 1 = 16 - 1 = 15$, $|A \cap B| = 3$, és a

kétjegyű számok száma $|S| = 90$. Tehát $|S - (A \cup B)| = 90 - 18 - 15 + 3 = 60$.

8. feladat: Hányféle képpen alakíthatunk ki 6 betűs szavakat az **a, e, m, o, u, y** betűkkel úgy, hogy ne tartalmazzák a **me** és **you** szavakat?

Megoldás: Legyenek S = az összes szó, A = a **me**-t tartalmazó szavak, B = a **you**-t tartalmazó szavak. A szitaképlet: $|S - (A \cup B)| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$. De

$|S| = 6!$, $|A| = 5!$ (mert „**me**, a, o, u, y” száma 5), $|B| = 4!$ (mert „**you**, a, m, e” száma

4), $|A \cap B| = 3!$ (mert a „**me, you, a**” száma 3). Tehát a

válasz: $720 - 120 - 24 + 6 = 582$.

9. feladat: Az egyetemen 200-an tanulnak angolt, 150-en spanyolt és 140-en franciát. 80-an angolt és franciát, 20-an angolt és spanyolt, 10-en spanyolt és franciát, 5-en pedig mindhárom nyelvet tanulják. Hányan tanulnak összesen nyelvet?

Megoldás: Bentről kifele haladva töltjük ki a halmazábrát.

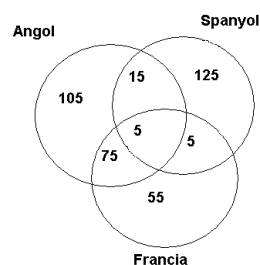
Először a „belső” 5-öt írjuk be. Ezután a $80-5=75$ -öt, a

$20-5=15$ -öt, végül a $140-5=135$ -öt. Ezután kitöltjük a „legkülső” tartományokat:

$200 - (5+15+75) = 105$, $150 - (5+15+135) = 125$, $140 - (5+15+135) = 55$. Ezután összeadva a

tartományokban levő számokat 385 adódik. A feladatot a szita-formulával is

megoldhatjuk: legyenek A = {angolul tudók}, S = {spanyolul tudók}, F = {franciául tudók}. Tehát:

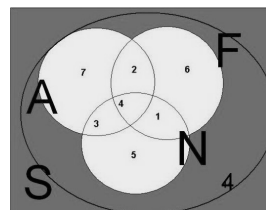


$$|A \cup S \cup F| = |A| + |S| + |F| - |A \cap S| - |S \cap F| - |F \cap A| + |A \cap S \cap F| =$$

$$= 200 + 150 + 140 - 20 - 10 - 80 + 5 = 385. \text{ Tehát ennyien tanulják}$$

valamelyik nyelvet.

10. feladat: Egy osztály 32 tanulója közül 16-an tanulnak angolul, 13-an franciául, 13-an németül. Az említett nyelvek közül 5-en németül és franciául is, 7-en németül és angolul is, 6-an angolul és franciául is tanulnak. Négyen mindhárom nyelvet tanulják. Hányan nem tanulják az említett nyelvek egyikét sem?



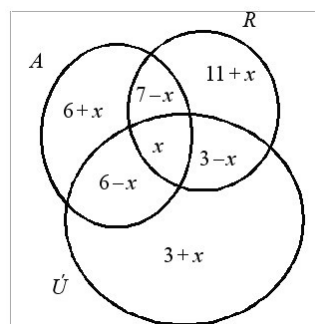
Megoldás: Bentről kifele haladva töltjük ki a halmazábrát.

Először a belső 4-est írtuk be, azután $5-4=1$, $7-4=3$, $6-4=2$, majd $16-(3+4+2)=7$, $13-(1+4+2)=6$, $13-(3+4+1)=5$. Az ábrán látható összes számok összege 28, és mivel $32-28=4$, ezért ez a válasz. A szita-formulával

$$|S - (A \cup F \cup N)| = |S| - |A| - |F| - |N| + |A \cap F| + |F \cap N| + |N \cap A| - |A \cap F \cap N| =$$

$$= 32 - 16 - 13 - 13 + 5 + 7 + 6 - 4 = 4, \text{ vagyis ennyi tanuló nem tanulja a három nyelv közül egyiket sem.}$$

11. feladat: Az osztályban 38 tanuló van. Mindenki űzi a következő sportágak valamelyikét: atlétika, röplabda, úszás. 19-en atlétizálnak, 21-en röplabdáznak, 12 tanuló úszik; 7 tanuló atlétizál és röplabdázik, 6 tanuló atlétizál és úszik, 3 tanuló röplabdázik és úszik. Hány tanuló űzi mindhárom sportot?



Megoldás: Legyen $|A \cap B \cap C| = x$ és bentről kifele

haladva töltjük ki a halmazábrát, majd összegezzük a benne látható kifejezéseket:

$$(11+x) + (6+x) + (3+x) + (7-x) + (3-x) + (6-x) + x = 38 \Rightarrow x=2$$

Szita-formulával is dolgozhatunk. Legyenek: $A=\{\text{atlétizálók}\}$, $R=\{\text{röplabdázók}\}$, $U=\{\text{úszók}\}$. Tehát felírható, hogy:

$$|A \cup R \cup U| = |A| + |R| + |U| - |A \cap R| - |R \cap U| - |U \cap A| + |A \cap R \cap U|.$$

Beírva a számosságokat kapjuk, hogy:

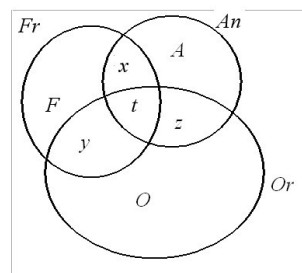
$$38 = 19 + 21 + 12 - 7 - 3 - 6 + |A \cap R \cap U|, \text{ vagyis } |A \cap R \cap U| = 2 \text{ tanuló}$$

űzi mindhárom sportot.

12. feladat: Egy osztály létszáma 30. Az osztályban három nyelvet tanulnak: angolt, orosz és franciát, és minden diák tanulja legalább az egyik nyelvet. Angolul 14-en, oroszul 15-en, franciául 25-en tanulnak. Pontosan két nyelvet összesen 6 diák tanul. Hányan tanulják mindhárom nyelvet?

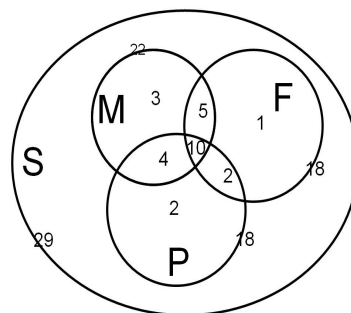
Megoldás: Legyen rendre Fr, An, Or a franciául, angolul, illetve oroszul beszélő tanulók halmaza; F, A, O a csak franciául, csak angolul, csak oroszul beszélő tanulók száma. Az x, y, z, t számok jelentése a diagramról leolvasható.

A feltételek alapján: $F + A + O + x + y + z + t = 30$;



$x + y + z = 6$; $F + x + y + t = 25$; $A + x + z + t = 14$; $O + y + z + t = 15$. Ezért $F + A + O = 30 - 6$, $F + A + O + 2 \times 6 + 3 \times t = 54$, ahonnan $t = 9$. Tehát ennyien tanulják mindhárom nyelvet.

13. feladat: Egy 29 fős osztálynak három kérdést tettek fel, mindenki igennel vagy nemmel válaszolhatott. A szereted-e a mateket kérdésre 22 igen, a szereted-e a fagyit kérdésre 18 igen, a szereted-e a palacsintát kérdésre 18 igen érkezett. Tudva azt, hogy azok közül akik szeretik a mateket 7-en nem szeretik a fagyit és 8-an nem szeretik a palacsintát, valamint 12-en szeretik a fagyit és a palacsintát, de közülük 2 nem szereti a mateket. Hányan mondtak nemet mindhárom kérdésre?



Megoldás: Jelölje: S = az osztály tanulói, M = {szeretik a mateket},

F = {szeretik a fagyit}, P = {szeretik a palacsintát}. Tehát

$|S| = 29$, $|M| = 22$, $|F| = 18$, $|P| = 18$. Vegyük észre,

hogy: $|M \cap F| = 22 - 7 = 15$, $|M \cap P| = 22 - 8 = 14$, $|F \cap P| = 12$ és

$|F \cap P \cap M| = 12 - 2 = 10$. A szita-formula alapján

$$|S - (M \cup F \cup P)| = |S| - |M| - |F| - |P| + |M \cap F| + |F \cap P| + |P \cap M| - |M \cap F \cap P|$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$|S - (A \cup B \cup C)| = 29 - (22 + 18 + 18) + (15 + 14 + 12) - 10 = 2 \text{ vagyis}$$

ennyien mondtak nemet mindhárom kérdésre. A feladatot a Ven-diagrammal is megoldhatjuk, ha először a 10-et írjuk be, aztán a $14 - 10 = 4$, $15 - 10 = 5$, $12 - 10 = 2$, majd sorra a $22 - (4 + 10 + 5) = 3$, $18 - (2 + 10 + 5) = 1$, és végül a $18 - (4 + 10 + 2) = 2$ értékeket. Ez összesen 27, így $29 - 27 = 2$ a felelet.

14. feladat: A matematika dolgozatban 4 feladatot kellett megoldani.

a) Az 1. feladatot 30, a 2.-at 32, a 3.-at 34, a 4.-et 32 oldotta meg jól.

b) Az 1. és 2.-at 12, az 1. és a 3.-at 12, az 1. és a 4.-et 12, a 2. és a 3.-at 15, a 2. és a 4.-et 11, a 3. és 4.-et 10-en oldották meg helyesen.

c) Az 1., 2., 3. feladatokat 6-on, az 1., 2., 4. feladatokat 5-en, az 1., 3., 4. feladatokat 3-an, a 2., 3., 4. feladatokat 4-en oldották meg helyesen.

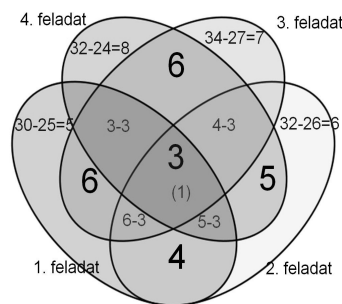
d) Az összes feladatot 3-an oldották meg hibátlanul.

e) Voltak 10-en akiknek egyetlen feladatot sem sikerült megoldani.

Hányan írtak dolgozatot matematikából?

Megoldás: A szita formulát alkalmazzuk 4 tagra, miszerint

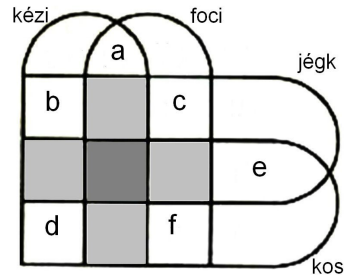
$$\left| \bigcup_{i=1}^4 A_i \right| = \sum_{i=1}^4 |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$



$$= (30 + 32 + 34 + 32) - (12 + 12 + 12 + 15 + 11 + 10) + (6 + 5 + 3 + 4) - 3 = 71.$$

Tehát $71 + 10 = 81$ tanuló írt dolgozatot matematikából. A feladatot Venn-Euler diagrammal is megoldhatjuk, ha belülről kifele haladva töltjük ki a halmazábrát, de hamar rájövünk, hogy ez sokkal körülményesebb mint a három kör esetén.

15. feladat: Egy 24-es létszámú sportosztály tanulói négy sportágban szerepelnek: kézilabdáznak, fociznak, jégkorongoznak és kosárlabdáznak. Minden tanuló sportol, de senki sem szerepel kettőnél több sportágban. Tudjuk, hogy 9-en nem kézilabdáznak, 11-en nem fociznak, 16-an nem jégkorongoznak, 12-en pedig nem kosárlabdáznak. Tudjuk még, hogy 10-en fociznak, de nem kosaraznak, 11-en pedig kézilabdáznak, de ők sem kosaraznak. Hányan, és milyen összetételben üznek két-két sportágat?



Megoldás: A feltevésből azt kapjuk, hogy $24 - 9 = 15$ -en kézilabdáznak, $24 - 11 = 13$ -an fociznak, $24 - 16 = 8$ -an jégkorongoznak, $24 - 12 = 12$ -en pedig kosárlabdáznak. Mivel $15 + 13 + 8 + 12 = 48$, és ez az összes tanulók számának a 2-szerese, következik, hogy mindenki pontosan két sportágban vesz részt, mert senki sem szerepel 2-nél több sportágban. Az ábrán látható halmazok az egyes sportágakban szereplő tanulókat jelölik, a betűk pedig a két-két sportágat űzők számát jelentik, a következőképpen: a – kézilabda-foci; b – kézilabda-jégkorong; c – foci-jégkorong; d – kézilabda-kosárlabda; e – jégkorong-kosárlabda; f – foci-kosárlabda.

$a + b + d = 15$ (1), $a + c + f = 13$ (2), $b + c + e = 8$ (3), $d + e + f = 12$ (4), $a + c = 10$ (5), $a + b = 11$ (6). Az 1. és 6. egyenlőségéből azt kapjuk, hogy $d = 4$, a 2. és 5. alapján $f = 3$, a 4. alapján $e = 5$. De 12-en nem kosaraznak, tehát $a + b + c = 12$, de $a + c = 10 \Rightarrow b = 2$, $a = 9$ és $c = 1$.

16. feladat: Ha $n = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^7$, akkor határozzuk meg a $\varphi(n)$ -et, az n -nél kisebb és n -nel relatív prím számoknak a számát.

Megoldás: Legyenek rendre $A = \{k \in N \mid k < n, k : 2\}$,

$$B = \{k \in N \mid k < n, k : 3\}, C = \{k \in N \mid k < n, k : 5\}. \text{ Tehát } |A| = \frac{n}{2},$$

$$|B| = \frac{n}{3}, |C| = \frac{n}{5}, |A \cap B| = \frac{n}{6}, |B \cap C| = \frac{n}{15}, |C \cap A| = \frac{n}{10} \text{ és}$$

$$|A \cap B \cap C| = \frac{n}{30}. \text{ A logikai szita alapján:}$$

$$\varphi(n) = n - |A \cup B \cup C| = n - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) - |A \cap B \cap C| =$$

$$= n - \frac{n}{2} - \frac{n}{3} - \frac{n}{5} + \frac{n}{6} + \frac{n}{10} + \frac{n}{15} - \frac{n}{30} = n \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} - \frac{1}{30} \right) =$$

$$= n \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right).$$

Megjegyzés: Észrevehető, hogy az előbb kapott eljárás és eredmény általánosítható,

ugyanis ha az n szám prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right).$$

17. feladat: (Elcserélt levelek) Hányféleképpen helyezhetünk el 4 levelet a megcímezett borítékokba úgy, hogy semelyik levél se a jó címzéshez kerüljön?

Megoldás: Legyen A_i azon esetek halmaza, amelyben az i -vel jelölt címzett

($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) megkapja a levelet. Ekkor $|A_i| = 3!$, $|A_i \cap A_j| = 2!$,

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1!, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1.$$

A logikai szita alapján

$$\left| \bigcup_{i=1}^4 A_i \right| = \sum_{i=1}^4 |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$

$$= C_4^1 \cdot 3! - C_4^2 \cdot 2! + C_4^3 \cdot 1! - C_4^4 = 4! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right).$$
 A kérdésre a válasz

$$\text{pedig: } a_4 = 4! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = 9.$$

Megjegyzés: Észrevehető, hogy az előbb kapott eljárás és eredmény általánosítható n

boríték esetén is, amelyre a válasz $a_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$

18. feladat: Határozzuk meg azokat a pozitív, egynél kisebb irreducibilis törtet, melyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy a számlálójuk és a nevezőjük összege 2001.

Megoldás: Azon pozitív, egynél kisebb törtnek a száma amelyeknek a számlálójuk és a nevezőjük összege 2001, éppen 1000. Meg kell néznünk, hogy

ezek közül hány irreducibilis. Ha $\frac{a}{b}$ egy ilyen tört, ahol $a < b$, $a+b=2001$, legyen d

egy közös osztója az a -nak is és a b -nek is. Akkor $d \mid a+b=2001$, ahonnan

$d \in \{3, 23, 29\}$. Legyenek rendre A, B, C azon $\frac{a}{b}$ törtnek a halmaza amelyek

rendre 3-mal, 23-mal, 29-cel egyszerűsíthetők. A logikai szita alapján:

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cup B \cup C|$$

ahol $|A \cup B \cup C| = 0$.

Ha $\frac{a}{b} \in A$, akkor $a=3x$, $b=3y$ és $3x+3y=2001$ vagyis $x+y=667$ és $0 < x < y$. Így

megkapjuk, hogy $|A| = 333$. Teljesen hasonló módon meghatározva a többi halmaz számosságát is kapjuk, hogy $|B| = 43$, $|C| = 34$, és $|A \cap B| = 14$, $|B \cap C| = 1$, $|C \cap A| = 11$. Így

$|A \cap B \cap C| = 333 + 43 + 34 - 14 - 1 - 11 = 384$. Tehát az irreducibilis törtek száma $1000 - 384 = 616$.

19. feladat: Hány féle képpen tehetünk be 30 szál virágot 15 különböző színű vázába, ha a virágok különbözőek, és minden vázába kell jusson legalább egy virág.

Megoldás: Az összes lehetséges kiosztások halmazát jelöljük H -val, és legyen A_i azon kiosztások halmaza amelyekenél az i . váza üres marad, $1 \leq i \leq 15$. A jó kiosztások halmaza tehát $H - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{15})$. Továbbá $|H| = 15^{30}$, $|A_i| = 14^{30}$ (függetlenül az i -től) hiszen virágonként 14-féle képpen dönthetünk (az i -edik váza üresen kell maradjon), $|A_i \cap A_j| = 13^{30}$ mert jelenleg két váza tiltott (az i . és a j . váza). Hasonlóképpen egy k -as metszetnek $(15-k)^{30}$ eleme van (k váza tiltott). Általában k -as metszetből C_{15}^k darab van, ezek elemszáma mindig ugyanakkora. A szita-formula szerint tehát: $|H - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{15})| =$
 $= 15^{30} - \sum_{k=1}^{30} (-1)^k C_{15}^k \cdot (15-k)^{30} = \sum_{k=0}^{30} (-1)^k C_{15}^k \cdot (15-k)^{30}$.

20. feladat: Hány olyan n jegyű szám van ($n > 3$), amelyik csupán az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

Megoldás: a logikai szita módszert alkalmaztuk, ahol a résztvevő halmazok a következők:

A azokat a számokat tartalmazza, amelyekben az 1-es nem szerepel,

B azokat, amelyekben a 2-es nem szerepel,

C pedig azokat, amelyekben a 3-as nem szerepel.

S pedig az n jegyű számok halmaza. A szitaformula alábbi változatát használjuk:

$$|S - (A \cup B \cup C)| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - |A \cap B \cap C|$$

ahol $|S| = 3^n$, $|A| = |B| = |C| = 2^n$, $|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1$ és

$|A \cap B \cap C| = 0$. Beírva ezeket a számokat kapjuk, hogy $|S - (A \cup B \cup C)| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.

21. feladat: Egy ismerősünknek el akarunk küldeni 8 különböző fényképet. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha pontosan 5 különböző borítékot akarunk felhasználni?

Megoldás: Jelöljük az A_i halmaz azokat a (nekünk nem megfelelő) eseteket amikor az i -edik boríték nem kerül felhasználásra, $1 \leq i \leq 5$. A logikai szitát alkalmazzuk 5 halmaz esetén. Az egyes halmazok számosságát és a lehetőségek számát a következő táblázatban foglaljuk össze:

Legfeljebb ennyi boríték	Esetek száma	A borítékok hányféleképpen választhatók ki
5	5^8	C_5^5
4	4^8	C_5^4
3	3^8	C_5^3
2	2^8	C_5^2
1	1^8	C_5^1

Így a szita-formula szerint a keresett érték:

$$C_5^5 \cdot 5^8 - C_5^4 \cdot 4^8 + C_5^3 \cdot 3^8 - C_5^2 \cdot 2^8 + C_5^1 \cdot 1^8 = 126000$$

22. feladat: Hányféle képpen ültethetünk le egy sorba 3 angolt, 3 franciát és 3 törököt úgy, hogy három azonos nemzetiségű ne üljön egymás mellé?

Megoldás: A logikai szita formulát alkalmazzuk három halmaz esetén:

Összes ültetési lehetőségek: $9!$. Ha (legalább) egy nép blokkban ül: $C_3^1 \cdot 7! \cdot 3!$, ha (legalább) két nép blokkban ül: $C_3^2 \cdot 5! \cdot 3! \cdot 3!$, ha mind a 3 csapat blokkban ül: $C_3^3 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!$. Így az

$$|S - (A \cup B \cup C)| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - |A \cap B \cap C|$$

szitaképlet alapján a kért érték: $9! - C_3^1 \cdot 7! \cdot 3! + C_3^2 \cdot 5! \cdot 3! \cdot 3! - C_3^3 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!$.

23. feladat: 4 házaspár hogyan helyezhető el egy kerek asztal körül úgy, hogy házastársak nem kerülnek egymás mellé.

Megoldás: A logikai szita-formulát alkalmazzuk négy halmaz esetén. Az A_i , $1 \leq i \leq 4$ halmazba azok a (számunkra nem kedvező) esetek kerülnek, amelyekben az i -edik férj és feleség egymás mellett ülnek. Az összes eset száma $7!$. Ha egy házaspár egymás mellett ül (a többi lehet, hogy egymás mellett ül, lehet, hogy nem), akkor az egymás mellett ülő pár C_4^1 -féle képpen választható ki, a pár és a többi 6 ember a kerek asztal körül $6!$ -féle képpen ülhet le, és a pár egymáshoz képest 2-féle képpen helyezkedhet el, tehát ezeknek az eseteknek

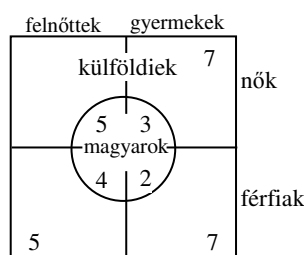
a száma $C_4^1 \cdot 6! \cdot 2$ A többi eset hasonló módon számolható ki. Az összes eset száma tehát:

$$7! - C_4^1 \cdot 6! \cdot 2 + C_4^2 \cdot 5! \cdot 2^2 - C_4^3 \cdot 4! \cdot 2^3 + C_4^4 \cdot 3! \cdot 2$$

Kakukktojásnak tűnik, de ugyancsak ide tartozik a következő, speciális halmazábrával megoldható feladat:

24. feladat: Egy repülőgép utasairól a következőket tudjuk: 9 fiú, 5 magyar gyermek, 9 felnőtt férfi, 7 külföldi fiú, 14 magyar, 6 magyar férfi (beleértve a magyar fiúkat is) és 7 külföldi leány. Hány utas volt a repülőgépen?

Megoldás:



A feladat megoldása céljából a mellékelt halmazábrát használjuk. Leghamarabb a 7 külföldi leány és a 7 külföldi fiú írható be a halmazábra megfelelő tartományába. Ezután a 9 fiú alapján a 2-es írható be, az 5 magyar gyerek alapján a 3-as írható be, ugyanakkor a 6 magyar férfi alapján a 4-est írjuk be, majd a 14 magyar alapján a belső 5-ös írható be. A 9 felnőtt alapján a külső 5-ös is beírható. Tehát összesen $2 \times 7 + 2 \times 5 + 4 + 2 + 3 = 33$ utasa volt a repülőgépnek.

Befejezésül megjegyezzük, hogy még sok más egyszerűbb vagy nehezebb feladat megoldható a bemutatott módszerekkel.