

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 047

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1, \infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $[1, 2]$.

5p **c)** Folosind faptul că $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$, oricare ar fi $x \in [1, \sqrt{2}]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2 - x \leq 2 \ln x$, pentru orice $x \in [1, \sqrt{2}]$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră integralele $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$.

5p **a)** Să se arate că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

5p **b)** Să se calculeze I_1 .

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.